Chaîne et champ de Markov : quelques récurrences et calcul d'une constante de normalisation

Généralisation aux modèles factorisables

X. Guyon , C. Hardouin

SAMM, Université Paris 1

MODAL'X, Université Paris Ouest

Introduction

Calcul des marginales et/ou de la constante de normalisation C pour une probabilité π :

Par exemple, pour un modèle d'Ising sur une grille 10×10, on doit sommer sur 2^{100} termes.

$\longrightarrow$ Conséquences sur l'estimation, les simulations...

- Calcul direct dans quelques cas,

Liu J. (2001). Monte Carlo strategies in scientific computing, Springer.

- Pseudo-vraisemblance (Besag 74),

- Monte-Carlo

Moeller J., Pettitt A.N., Reeves R., Berthelsen K.K. (2006) Miscellanea. An efficient Markov chain Monte Carlo method for distributions with intractable normalizing constants. Biometrika 93, 2, pp.451-458.

Nouveaux algorithmes

- Bartolucci F., Besag J. (2002) A recursive algorithm for Markov random fields. Biometrika 89, 3,. 724-730.

$\longrightarrow$ La vraisemblance comme un produit de probas conditionnelles

- Pettitt A.N., Friel N., Reeves R. (2003) Efficient calculation of the normalizing constant of the autologistic and related models on the cylinder and lattice. JRSS. B. 65, Part 1, 235-246.

$\longrightarrow$ Calcul exact de C pour une distribution à K états, sur un cylindre $m \times n$, via une méthode qui demande le calcul des vp d'une matrice $K^m \times K^m$, faisable pour $K^m \lesssim 1024$, par exple $K = 2$ et $m = 10$.

- Reeves R., Pettitt A.N. (2004) Efficient recursions for general factorisable models. Biometrika 91, 3, 751-757.

$\longrightarrow$ Récursions sur les marginales pour une distribution "factorisable".

- Khaled M. (2008), A multivariate generalization of a Markov switching model, working paper, C.E.S., Université Paris 1.

Khaled M. (2008), Estimation bayésienne de modèles espace-état non linéaires, Thèse de l'Université Paris1.

Hardouin C. , Guyon X. (2010). Exact marginals and normalizing constant for Gibbs distributions. CRAS Ser I, Volume 348, Issues 3-4, 199-201.

- Hardouin C. , Guyon X. (2010).http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/45/26/51/PDF/FieldChain5.pdf

- Friel N., Rue H. (2007). Recursive computing and simulation free inference for general factorizable models. Biometrika 94, 661-672.

Friel N., Pettitt A.N., Reeves R., Wit E. (2009). Bayesian inference in hidden Markov random fields for binary data defined on large lattices. Journal of computational and graphical statistics 18, 243-261.

1. Exemple de base

Soient T un entier > 0 fixé, $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_N\}$ espace d'états fini,

$Z = (Z_1, Z_2, \cdots, Z_T)$ de loi jointe π sur E^T. On note $z(t) = (z_1, z_2, \cdots, z_t)$,

$$\pi(z(T)) = C \exp U_T(z(T))$$

$$U_t(z(t)) = \sum_{s=1,t} \theta_s(z_s) + \sum_{s=2,t} \Psi_s(z_{s-1}, z_s) \text{ si } 2 \leq t \leq T,\ \ U_1(z_1) = \theta_1(z_1)$$

$$C^{-1} = \sum_{z(T) \in E^T} \exp U_T(z(T))$$

Objectif : obtenir des formules explicites permettant le calcul des lois marginales $\pi_t(z(t)) = \pi_t(z_1, z_2, \cdots, z_t)$, ainsi que le calcul de C.

Remarques

1. π est un champ de Markov bilatéral aux 2-ppv :

$$\begin{aligned} \pi(z_t \quad | \quad & z_s, 1 \leq s \leq T \text{ et } s \neq t) = \pi(z_t \mid z_{t-1}, z_{t+1}). \\ = \quad & \frac{\exp\{\theta_t(z_t) + \Psi_t(z_{t-1}, z_t) + \Psi_{t+1}(z_t, z_{t+1})\}}{\sum_{u \in E} \exp\{\theta_t(u) + \Psi_t(z_{t-1}, u) + \Psi_{t+1}(u, z_{t+1})\}} \end{aligned} \tag{1}$$

$\pi(z_t \mid z_{t-1}, z_{t+1})$ s'explicite facilement dès que N n'est pas trop grand.

2. Z est une chaîne de Markov : $\pi(z_t \mid z_s, s \leq t-1) = \pi(z_t \mid z_{t-1})$

$$\pi(z_t \mid z_s, s \leq t-1) = \exp\{\theta_t(z_t) + \theta_t^*(z_t) - \theta_{t-1}^*(z_{t-1}) + \Psi_t(z_{t-1}, z_t)\} \tag{2}$$

$$\exp\{\theta_t^*(z_t)\} = \sum_{u_{t+1}^T} \exp\{\sum_{s=t+1}^{T} \theta_s(u_s) + \Psi_{t+1}(z_t, u_{t+1}) + \sum_{t+2}^{T} \Psi_s(u_{s-1}, u_s)\}.$$

Notation $u_s^t = (u_s, u_{s+1}, \cdots, u_t)$.

(1) est calculable alors que (2) ne l'est pas du fait de la sommation en u_{t+1}^T de complexité N^{T-t}.

2. Récursions sur les lois marginales

Pour $t \leq T-1$, $\pi(z_1, z_2, \cdots, z_t \mid z_{t+1}, z_{t+2}, \cdots, z_T)$ ne dépend que de z_{t+1}.

$$\pi(z_1, z_2, \cdots, z_t \mid z_{t+1}, z_{t+2}, \cdots, z_T) = \frac{\pi(z_1, z_2, \cdots, z_T)}{\sum_{u_1^t \in E^t} \pi(u_1^t, z_{t+1}, ..z_T)}$$

$$= \frac{\exp\{U_t(z_1, ..., z_t) + \Psi_{t+1}(z_t, z_{t+1})\}}{\sum_{u_1^t \in E^t} \exp\{U_t(u_1, ..., u_t) + \Psi_{t+1}(u_t, z_{t+1})\}}$$

$$= \pi(z_1, z_2, \cdots, z_t \mid z_{t+1}).$$

On réécrit

$$\pi(z_1, z_2, \cdots, z_t \mid z_{t+1}) = C_t(z_{t+1}) \exp U_t^*(z_1, z_2, \cdots, z_t; z_{t+1})$$

U_t^* est l'*énergie conditionnelle au futur* définie par :

$$U_t^*(z_1, z_2, \cdots, z_t; z_{t+1}) = U_t(z_1, z_2, \cdots, z_t) + \Psi_{t+1}(z_t, z_{t+1}). \qquad (3)$$

et $C_{t+1}(z_{t+1})^{-1} = \sum_{u_1^t \in E^t} \exp \{U_t^*(u_1, ..., u_t; z_{t+1})\}$.

On note $\gamma_t(z(t); e_i) = \exp U_t^*(z(t); e_i)$ la "contribution" à la loi π_t de $Z(t)$ conditionnelle au futur $z_{t+1} = e_i$.

$$\pi(z_1, z_2, \cdots, z_t \mid z_{t+1} = e_i) = C_t(e_i)\gamma_t(z_1, z_2, \cdots, z_t; e_i).$$

Pour $t \leq T - 1$, le vecteur $\Gamma_t(z(t))$ des contributions conditionnelles au futur est le vecteur de $\mathbb{R}^N$ de i-ième coordonnée, $1 \leq i \leq N$:

$$(\Gamma_t(z(t)))_i = \gamma_t(z(t); e_i) \ .$$

Pour $t = T$, il n'y a pas de conditionnement et $\Gamma_T(z(T))$ est constant. Avec la convention $\Psi_{T+1} \equiv 0$, on a la définition pour $t \leq T$.

On définit, pour $1 \leq t \leq T$, la matrice A_t de taille $N \times N$ de terme général :

$$A_t(i,j) = \exp\{\theta_t(e_j) + \Psi_{t+1}(e_j, e_i)\}, \text{ et } i,j = 1, N. \tag{4}$$

A_T est une matrice à colonnes constantes.

On a alors la récurrence fondamentale suivante :

Proposition 1 *Pour tout $2 \leq t \leq T$, $z(t) \in E^t$ et $e_i \in E$, on a :*

$$\gamma_t(z(t-1), e_j; e_i) = A_t(i,j) \times \gamma_{t-1}(z(t-1); e_j) \ , \tag{5}$$

et

$$\sum_{z_t \in E} \Gamma_t(z(t-1), z_t) = A_t \Gamma_{t-1}(z(t-1)). \tag{6}$$

En effet, U_t vérifie $U_t(z(t-1), z_t) = U_{t-1}(z(t-1)) + \theta_t(z_t) + \Psi_t(z_{t-1}, z_t)$,

$$\begin{aligned}U_t^*(z(t-1), a; b) &= U_{t-1}(z(t-1)) + \theta_t(a) + \Psi_t(z_{t-1}, a) + \Psi_{t+1}(a, b) \\ &= U_{t-1}^*(z(t-1); a) + \{\theta_t(a) + \Psi_{t+1}(a, b)\}.\end{aligned}$$

On définit $B_T = (1, 0, \cdots, 0)$ et la suite $(B_t)_{t=T,2}$ définie par la récursion $B_{t-1} = B_t A_t$ si $t \leq T$.

On note également $K_1 = \sum_{z_1 \in E} \Gamma_1(z_1) \in \mathbb{R}^N$.

Le calcul de K_1 est facile si N n'est pas trop grand puisque sa i-ème coordonnée vaut $K_{1i} = \sum_{z_1 \in E} \exp\{\theta_1(z_1) + \Psi_2(z_1, e_i)\}$.

Proposition 2 *Calcul des lois marginales π_t et de la constante de normalisation C.*

(1) Pour $1 \leq t \leq T$ *:*

$$\pi_t(z(t)) = C \times B_t \Gamma_t(z(t)). \tag{7}$$

(2) La constante de normalisation C de la loi globale π vérifie :

$$C^{-1} = B_T A_T A_{T-1} \cdots A_2 K_1. \tag{8}$$

Si les potentiels de π sont invariants dans le temps, $A_t \equiv A$ pour $1 \leq t \leq T-1$, avec $A(i,j) = \exp\{\theta(e_j) + \Psi(e_j, e_i)\}$, $A_T(i,j) = \exp\theta(e_j)$ et

$$C^{-1} = B_T A_T A^{T-2} K_1.$$

Si la taille N de E permet la diagonalisation de A, le calcul de C est possible indépendamment de la dimension temporelle T.

Exemple 1 $E = \{0, 1\} = \{e_1, e_2\}$, de potentiels $\theta_t(z_t) = \alpha z_t$ et $\Psi_{t+1}(z_t, z_{t+1}) = \beta z_t z_{t+1}$ pour $t \leq T - 1$.

$$A_t = A = \begin{pmatrix} 1 & e^{\alpha} \\ 1 & e^{\alpha+\beta} \end{pmatrix} \text{ pour } t = 1, T-1, \; A_T = \begin{pmatrix} 1 & e^{\alpha} \\ 1 & e^{\alpha} \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } K_1 = \begin{pmatrix} 1 + e^{\alpha} \\ 1 + e^{\alpha+\beta} \end{pmatrix}.$$

Ici, tous les calculs sont explicites. Implémentation sous matlab :

Méthode 1 : $C^{-1} = E_1 A_T A^{T-2} K_1$.

Méthode 2 : Sommation sur E^T .

$\alpha = 1, \; \beta = -0.8$	Meth 1	Meth 2	Meth 2 bis	Valeur C^{-1}
$T = 10$	0	0.4690	0.0150	$3.344e + 004$
$T = 20$	0	744.6570	33.8120	$8.675e + 008$
$T = 25$	0	˜ 6 *heures*	1315.0	$1.397e + 011$
$T = 690$	0			$4.761e + 304$
$T \geq 700$	0			∞

Exemple 2

Considérons $E = \{0,1\}^2$ ($N = 4$ états), et le modèle d'Ising non isotropique :

$\pi_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = C \exp\{\alpha x_1+\beta y_1+\gamma x_1 y_1+\alpha x_2+\beta y_2+\gamma x_2 y_2+\delta(x_1 x_2+y_1 y_2)\}$.

La matrice A, de taille 4×4, et K_1 est le vecteur de $\mathbb{R}^4$ ayant pour i-ème élément $\sum_{z=(x,y)\in E} \exp\{\alpha x + \beta y + \gamma xy + \delta(xx_i + yy_i)\}$.

Les calculs ont été menés avec les valeurs $\alpha = 1$, $\beta = -0.8$, $\gamma = -0.5$, $\delta = 0.04$.

Méthode 1 : $C^{-1} = E_1 A_T A^{T-2} K_1$.

Méthode 2 : $C^{-1} = E_1 A_T P D^{T-2} P^{-1} K_1$

On calcule jusqu'à $C^{-1} = 9.949e + 306$ pour $T = 430$. Par contre, les temps de calcul sont encore nuls.

3. Modèle de distribution "factorisable"

Soient $T > 0$ un entier, E l'espace d'états à N éléments, $Z(T) = (Z_1, Z_2, \cdots, Z_T)$ de loi jointe π *factorisable* sur E^T (Reeves and Pettitt, 2004):

$$\pi(z(T)) = C^{-1} \exp \sum_{s=1,T-1} h_s(z_s, z_{s+1}) \tag{9}$$

On réécrit

$$\pi(z(T)) = C^{-1} \prod_{s=1,T-1} H_s(z_s, z_{s+1})$$

Les H_s, $s = 1, T-1$, sont des matrices $N \times N$.

π est une distribution de Gibbs avec l'énergie $U_T(z(T)) = \sum_{s=1,T-1} h_s(z_s, z_{s+1})$

π est un champ de Markov bilatéral aux 2 ppv avec

$$\pi(z_t \mid z_s, s \neq t) = \frac{H_{t-1}(z_{t-1}, z_t) H_t(z_t, z_{t+1})}{H_{t-1} H_t(z_{t-1}, z_{t+1})} = \pi(z_t \mid z_{t-1}, z_{t+1}). \qquad \text{(calculable)}$$

C'est aussi une chaîne de Markov avec $\pi(z_t \mid z_s,\ s \leq t-1) = \pi(z_t \mid z_{t-1})$.

Récursion sur les marginales

$B_T = \mathbf{1}$ le N-vecteur colonne de composantes 1.

$$\pi_1^{T-1}(z_1, z_2, \cdots, z_{T-1}) = C^{-1}\{\prod_{s=1,T-2} H_s(z_s, z_{s+1})\}(H_{T-1}B_T)(z_{T-1})$$

Avec la notation $HB(u) = \sum_v H(u,v)B(v)$.

En posant $B_{t-1} = H_{t-1}B_t$, on obtient les marginales pour $t = T, 2$:

$$\pi_1^t(z_1, z_2, \cdots, z_t) = C^{-1} \prod_{s=1,t-1} H_s(z_s, z_{s+1})(H_t \cdots H_{T-1}B_T)(z_t)$$

Et la constante

$$C =^t B_T\{\prod_{s=1,T-1} H_s\}B_T. \qquad (10)$$

Si les potentiels sont invariants par translation, on obtient $C = {}^t\mathbf{1}(H)^{T-1}\mathbf{1}$ (ou $C = {}^t\mathbf{1}(H)^{T-2}H_{T-1}\mathbf{1}$ si $H_{T-1} \neq H$).

Autres marginales :

Posons $F_t = F_{t-1}H_{t-1}$ pour $t \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\pi_t^T(z_t, z_{t+1}, \cdots, z_T) &= C^{-1}\{(F_{t-1}H_{t-1})(z_t) \prod_{s=t,T-1} H_s(z_s, z_{s+1})\} \\
&= C^{-1}\{(F_1 H_1 H_2 \cdots H_{t-1})(z_t) \prod_{s=t,T-1} H_s(z_s, z_{s+1})\}.
\end{aligned}$$

Un peu plus général : la marginale sur $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_q\} \subseteq \mathcal{T} = \{1, 2, \cdots, T\}$ avec $1 = s_1 < s_2 < \cdots < s_{q-1} < s_q = T$

$$\pi_S(z_1, z_{s_2}, \cdots, z_{s_{q-1}}, z_T) = C^{-1} \prod_{i=1,q-1} \left(\prod_{s=s_i}^{s_{i+1}-1} H_s\right)(z_{s_i}, z_{s_{i+1}}), \qquad (11)$$

Et enfin la marginale sur $S \backslash \{1, T\}$: on remplace le premier produit $(\prod_1^{s_2-1} H_s)(z_1, z_{s_2})$ par ${}^t\mathbf{1}(\prod_1^{s_2-1} H_s)(z_{s_2})$ et le dernier $(\prod_{s_{q-1}}^{s_q-1} H_s)(z_{s_{q-1}}, z_T)$ par $((\prod_{s_{q-1}}^{s_q-1} H_s)\mathbf{1})(z_{s_{q-1}})$.

Obtention des marginales conditionnellement au futur :

Récursion

$$\sum_{z_t \in E} \Gamma_t(z_1^{t-1}, z_t) = \Gamma_{t-1}(z_1^{t-1}) H_t. \tag{12}$$

et

$$\pi_1^t(z_1^t) = C^{-1} \times \Gamma_t(z_1^t) D_t. \tag{13}$$

où $D_{t-1} = H_t D_t$ et $D_T = {}^t(1, 0, \cdots, 0)$

4. Extension aux potentiels de portée r

$$\pi(z(T)) = C^{-1} \prod_{s=1}^{T-r} H_s(z_s, z_{s+1}, \cdots, z_{s+r})$$

Maintenant H_s est définie sur $E^* = E^{r+1}$ et on définit H^* sur $E^* \times E^*$ par:

$$H^*(u,v) = H(u_2^{r+1}, v_{r+2}) \prod_{i=1}^{r} \mathbf{1}(u_{i+1} = v_i). \tag{14}$$

On obtient les mêmes formules pour les marginales et pour la constante avec les objets $(*)$

$$C =^t \mathbf{1}(\prod_{s=1}^{T-r} H_s^*)\mathbf{1}.$$

Exemple

$$U_T(z(T)) = \sum_{s=1,T} \theta_s(z_s) + \sum_{s=2,T} \Psi_{1,s}(z_{s-1}, z_s) + \sum_{s=3,T} \Psi_{2,s}(z_{s-2}, z_s)\}.$$

π caractérise un champ de Markov bilatéral aux 4-ppv avec

$$\pi(z_t \mid z_s, 1 \leq s \leq T \text{ et } s \neq t) = \pi(z_t \mid z_{t-1}, z_{t+1}, z_{t-2}, z_{t+2}).$$

De même, Z est une chaîne de Markov d'ordre 2.

Pour $t \leq T-2$, la loi conditionnelle $\pi(z(t) \mid z_{t+1}, z_{t+2}, \cdots, z_T) = \pi(z(t) \mid z_{t+1}, z_{t+2})$ ne dépend que de z_{t+1} et z_{t+2}. Elle s'écrit sous la forme

$$\pi(z(t) \mid z_{t+1}, z_{t+2}) = C_t(z_{t+1}, z_{t+2}) \exp U_t^*(z(t); z_{t+1}, z_{t+2})$$

où $U_t^*(z(t); z_{t+1}, z_{t+2})$ est l'*énergie conditionnelle au futur*

$$= U_t(z(t)) + \Psi_{1,t+1}(z_t, z_{t+1}) + \Psi_{2,t+1}(z_{t-1}, z_{t+1}) + \Psi_{2,t+2}(z_t, z_{t+2})$$

et $C_t(z_{t+1}, z_{t+2})^{-1} = \sum_{u_1^t \in E^t} \exp U_t^*(u_1, .., u_t; z_{t+1}, z_{t+2})$.

Pour a, b et $c \in E$, on vérifie facilement que :

$U_t^*(z(t-1), a; b, c) = U_{t-1}^*(z(t-1); a, b) + \theta_t(a) + \Psi_{1,t+1}(a, b) + \Psi_{2,t+2}(a, c)$.

Avec la convention $\Psi_{1,s} \equiv \Psi_{2,s} \equiv 0$ dès que $s > T$, on définit :

* pour $t \leq T-2$ le "vecteur" $\Gamma_t(z(t))$ des *contributions conditionnelles* au futur $(z_{t+1}, z_{t+2}) = (e_i, e_j), i, j = 1, N$ comme le vecteur $N^2 \times 1$ de coordonnées (i, j) :

$$\gamma_t(z(t); (e_i, e_j)) = \exp U_t^*(z(t); e_i, e_j).$$

$\Gamma_{T-1}(z(T-1))$ est le vecteur des contributions conditionnelles au futur $z_T = e_i$ $(\Gamma_{T-1}(z(T-1))_i = \exp\{U_{T-1}(z(T-1)) + \Psi_{1,T}(z_{T-1}, e_i) + \Psi_{2,T}(z_{T-1}, e_i)\}$

$\Gamma_T(z(T))$ est le vecteur constant de coordonnées $\exp\{U_T(z(T)\}$.

* A la matrice $N^2 \times N^2$ dont les uniques termes non nuls sont :

$$A_t((i, j), (k, i)) = \exp\{\theta_t(e_k) + \Psi_{1,t+1}(e_k, e_i) + \Psi_{2,t+2}(e_k, e_j)\}$$

On obtient une récurrence sur les γ_t

$$\gamma_t(z(t-1), e_k; (e_i, e_j)) = A_t((i,j),(k,i)) \times \gamma_{t-1}(z(t-1); (e_k, e_i))$$

ainsi que la formule (6) sur les $\Gamma_t(z(t))$.

5. Champs de Gibbs spatial

On considère Z comme un processus de Gibbs multidimensionnel :

$Z_t = (Z_{(t,i)},\ i \in \mathcal{I})$, où $\mathcal{I} = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $Z_{(t,i)} \in F$.

π est une distribution de Gibbs de potentiels invariants par translation $\Phi_{A_k}(.)$.

On réécrit :

$$U(z(T)) = \sum_{h=0}^{H} \sum_{t=h+1}^{T} \Psi(z_{t-h}, \cdots, z_t)$$

(Z_t) est un champ markovien aux 2ppv et aussi un processus markovien de mémoire H.

$Y_t = (Z_t, Z_{t+1}, \cdots Z_{t+H}), t = 1, T-H$, est une chaîne de Markov sur $E^* = E^H$ pour laquelle on a les résultats.

Exemple 3 Modèle d'Ising

$\mathcal{S} = \mathcal{T} \times \mathcal{I} = \{1, 2, \cdots, T\} \times \{1, 2, \cdots, m\},\ F = \{-1, +1\}$, et $Z = (Z_{(t,i)},\ (t,i) \in \mathcal{S})$ est un champ de Markov sur $\mathcal{S}$ aux 4-ppv, de potentiels :

$$\begin{aligned}
\Phi_{t,i}(z) &= \alpha\, z_{(t,i)} \\
\Phi_{\{(t,i),(t,i+1)\}}(z) &= \beta\, z_{(t,i)} z_{(t,i+1)}, \\
\text{et } \Phi_{\{(t,i),(t+1,i)\}}(z) &= \delta\, z_{(t,i)} z_{(t+1,i)}\ .
\end{aligned}$$

Oubliant la dimension spatiale et considérant l'état $z_t = (z_{(t,i)}, i = 1, m) \in E = \{-1, +1\}^m$, Z est un champ de Gibbs temporel de potentiels invariants par translation,

$$\begin{aligned}
\theta_t(z_t) &= \theta(z_t) = \alpha \sum_{i=1,m} z_{(t,i)} + \beta \sum_{i=1,m-1} z_{(t,i)} z_{(t,i+1)}, \\
\Psi_t(z_t, z_{t+1}) &= \Psi(z_t, z_{t+1}) = \delta \sum_{i=1,m} z_{(t,i)} z_{(t+1,i)}.
\end{aligned}$$

On définit les stats de comptage associées à c, $d \in E = \{-1, +1\}^m$:

$n^+(c) = \sharp\{i \in \mathcal{I} : c_i = +1\}$, $n^-(c) = m - n^+(c)$,

$v^+(c) = \sharp\{i = 1, m - 1 : c_i = c_{i+1}\}$, $v^-(c) = (m - 1) - v^+(c)$,

et $n^+(c, d) = \sharp\{i \in \mathcal{I} : c_i = d_i\}$, $n^-(c, d) = m - n^+(c, d)$.

On applique la formule (10) aux matrices $2^m \times 2^m$ $H_t = H$:

$H(u, v) = \exp\{\alpha(n^+(u) - n^-(u)) + \beta(v^+(u) - v^-(u)) + \delta(n^+(u, v) - n^-(u, v))\}$.

$$C =^t B_T H^{T-2} H_T B_T.$$

Exemple :

$\alpha = 0.15$, $\beta = 0.05$, $\delta = -0.08$. On fixe m petit, $m = 10$, mais pas de limitation pour T.

$m = 10$	M1 (puissance H^{T-2})	M2 (diagonalisation)	C
$T = 2$	0.3130	32.4850	1.3855e+006
$T = 10$	8.9220	40.8290	5.4083e+030
$T = 50$	15.4380	47.4060	4.8989e+153
$T = 100$	19.3600	51.0950	2.4344e+307

6. Généralisations

Extensions à des potentiels de triplets...

Espaces d'états différents, $E_t \ni z_t$; même résultats avec des matrices H_t rectangulaires.

$\mathcal{T} = S_Q \supset S_{Q-1} \supset \cdots \supset S_1$, avec $S_q = S_{q-1} \cup \partial S_{q-1}$

7. Perspectives

Grands lattices ???

On combine vrais calculs de constante avec approximations

On conditionne sur des lignes plutôt que sur des points comme pour la pseudo vraisemblance.

Friel N., Rue H. (2007). Recursive computing and simulation free inference for general factorizable models. Biometrika 94, 661-672.

Friel N., Pettitt A.N., Reeves R., Wit E. (2009). Bayesian inference in hidden Markov random fields for binary data defined on large lattices. Journal of computational and graphical statistics 18, 243-261.

Graphes

Jordan, m. (2004). Graphical models. Statistical Science 19, 140-158.