

Échantillonnage adaptatif spatialisé basé sur le modèle booléen

Mathieu BONNEAU

Université Paul Sabatier-I.N.R.A

Présentation

Échantillonnage
adaptatif
spatialisé
basé sur
le modèle
booléen

Mathieu
BONNEAU

Introduction

Le modèle
booléen

Le krigeage

Échantillonnage

Illustration

Perspectives

- **Objectif du stage** : Développer des méthodes d'échantillonnages en utilisant un modèle continu.
- **Outils utilisés** : -Carte d'occurrence \Leftrightarrow Réalisation d'un ensemble booléen.
-Reconstruction \Leftrightarrow Prédiction par krigeage.

plan

Échantillonnage
adaptatif
spatialisé
basé sur
le modèle
booléen

Mathieu
BONNEAU

Introduction

Le modèle
booléen

Le krigeage

Échantillonnage

Illustration

Perspectives

- 1 Introduction
- 2 Le modèle booléen
- 3 Le krigeage
- 4 Échantillonnage
- 5 Illustration
- 6 Perspectives

Définition du modèle booléen

Échantillonnage

adaptatif
spatialisé
basé sur
le modèle
booléen

Mathieu
BONNEAU

Introduction

Le modèle
booléen

Le krigeage

Échantillonnage

Illustration

Perspectives

Définition

Soit $\phi = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ un processus de Poisson ponctuel en \mathbb{R}^d de fonction d'intensité $\lambda(\mathbf{x})$. Et soit A une famille de compacts aléatoires non vide mutuellement indépendants et de même loi. Le **modèle booléen** Ξ est la réunion de tous les compacts A implantés aux points ω_i du processus de Poisson :

$$\Xi = \bigcup_{\omega_i \in \phi} A(\omega_i)$$

Les points ω_i sont appelés les **germes** du modèle booléen et le sous ensemble $A(\omega_i)$ est appelé **grain primaire** implanté au germe ω_i .

Définition du modèle booléen

Échantillonnage
adaptatif
spatialisé
basé sur
le modèle
booléen

Mathieu
BONNEAU

Introduction

Le modèle
booléen

Le krigeage

Échantillonnage

Illustration

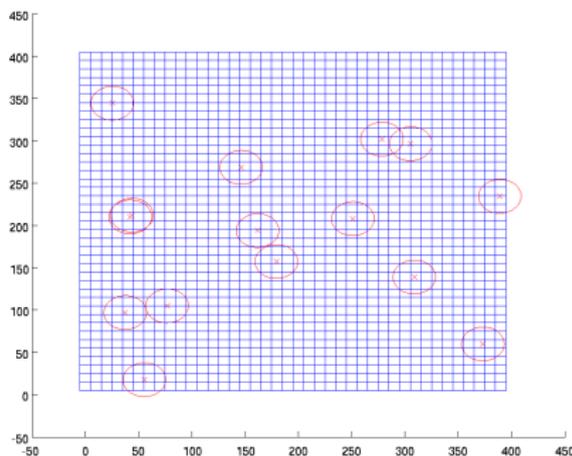
Perspectives

- Le modèle booléen dépend de deux paramètres :
 - L'intensité $\lambda(\mathbf{x})$, $x \in \mathbb{R}^d$ du processus de Poisson.
 - La loi des grains primaires.
- La distribution du modèle booléen est uniquement déterminée par sa capacité de Choquet, T_{Ξ} :

$$T_{\Xi}(K) = \mathbb{P}(K \cap \Xi \neq \emptyset) \quad \forall K \text{ compact}$$

Application aux cartes d'invasions

- Dans notre cas les *grains primaires* sont des disques de rayon constant r .
- Les *germes* du modèle booléen représentent les points d'apparition des nids de fourmis.
- Les *grains primaires*, les zones de propagation de ces nids.
- Le modèle booléen est considéré **stationnaire** et **isotrope**.



Propriétés des variables X et Y

Échantillonnage

adaptatif
spatialisé
basé sur
le modèle
booléen

Mathieu
BONNEAU

Introduction

Le modèle
booléen

Le krigeage

Échantillonnage

Illustration

Perspectives

- $\mathbb{P}(Y_i = 1/X_i = 1) = \theta$
 $\mathbb{P}(Y_i = 0/X_i = 1) = 1 - \theta$
 $\mathbb{P}(Y_i = 0/X_i = 0) = 1$
 $\mathbb{P}(Y_i = 1/X_i = 0) = 0$
- $\mathbb{P}(Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n/X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$
 $= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(Y_i = y_i/X_i = x_i)$
- La cellule $i \in \{1, \dots, n\}$ est infectée si et seulement si le centre de la cellule i appartient au modèle booléen Ξ :

$$X_i = X(x_i, y_i) = 1_{\Xi}(x_i, y_i)$$

Vers l'échantillonnage. . .

Échantillonnage
adaptatif
spatialisé
basé sur
le modèle
booléen

Mathieu
BONNEAU

Introduction

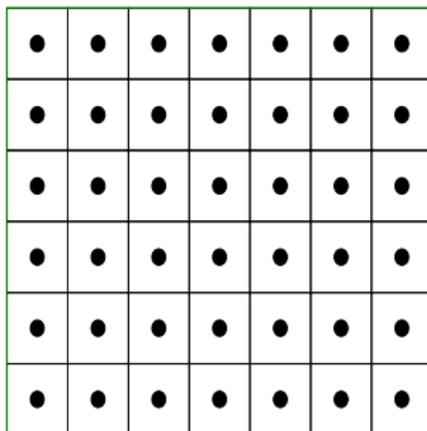
Le modèle
booléen

Le krigeage

Échantillonnage

Illustration

Perspectives



- On s'autorise à aller observer n points régulièrement espacés.
- On interpole ensuite ces valeurs sur tous les carrés entourant ces points.

Vers l'échantillonnage. . .

Échantillonnage

adaptatif
spatialisé
basé sur
le modèle
booléen

Mathieu
BONNEAU

Introduction

Le modèle
booléen

Le krigeage

Échantillonnage

Illustration

Perspectives

- Notation :

- $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$: l'ensemble des cellules visitées lors de l'échantillonnage.

- $\{\alpha_{N+1}, \dots, \alpha_H\}$: l'ensemble des cellules qui ont déjà été observées, activement ou passivement.

- **Objectif** : Trouver l'ensemble optimal $(\alpha_1^*, \dots, \alpha_N^*)$ des sites à visiter pour un certain critère de qualité.

⇔ Définir une technique de reconstruction ⇔ Krigeage.

⇔ Définir la qualité d'un échantillon ⇔ Variance du krigeage.

Reconstruction

Échantillonnage
adaptatif
spatialisé
basé sur
le modèle
booléen

Mathieu
BONNEAU

Introduction

Le modèle
booléen

Le krigeage

Échantillonnage

Illustration

Perspectives

- Le **krigeage** va nous permettre de calculer une valeur approchée de :

$$\mathbb{P}(X(x_0, y_0) = 1/y_{\alpha_1}, \dots, y_{\alpha_H})$$

- Pour ceci il faut déterminer les poids $\lambda_0^*, \lambda_{\alpha_1}^*, \dots, \lambda_{\alpha_H}^*$ solution du problème :

$$\min_{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_H} \mathbb{E}_{X_0, Y_{\alpha_1}, \dots, Y_{\alpha_N}} \left[\left((\lambda_0 + \sum_{j=1}^H \lambda_{\alpha_j} Y_{\alpha_j}) - X_0 \right)^2 / y_{\alpha_{N+1}}, \dots, y_{\alpha_H} \right]$$

- $\lambda_0^* + \sum_{j=1}^H \lambda_{\alpha_j}^* Y_{\alpha_j}$ est une approximation de l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}[X(x_0, y_0) / y_{\alpha_1}, \dots, y_{\alpha_H}] = \mathbb{P}(X(x_0, y_0) = 1/y_{\alpha_1}, \dots, y_{\alpha_H})$$

- Ainsi $X_0^* = (\lambda_0^* + \sum_{j=1}^H \lambda_{\alpha_j}^* Y_{\alpha_j} > \frac{1}{2})$

Recherche du minimum

Échantillonnage
adaptatif
spatialisé
basé sur
le modèle
booléen

Mathieu
BONNEAU

Introduction

Le modèle
booléen

Le krigeage

Échantillonnage

Illustration

Perspectives

- Les $\lambda_0^*, \lambda_{\alpha_1}^*, \dots, \lambda_{\alpha_H}^*$ optimaux sont solutions du **système du krigeage** :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^N \lambda_{\alpha_j} (p_{1j} - p_j p_1) = p_{01} - p_1 p_0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^N \lambda_{\alpha_j} (p_{Nj} - p_j p_N) = p_{0N} - p_N p_0 \end{cases}$$

où

$$p_{\alpha_i \alpha_j} = \mathbb{E}[Y_{\alpha_i} Y_{\alpha_j} / y_{\alpha_{N+1}}, \dots, y_{\alpha_H}]$$
$$p_{\alpha_i} = \mathbb{E}[Y_{\alpha_i} / y_{\alpha_{N+1}}, \dots, y_{\alpha_H}]$$
$$p_0 = \mathbb{E}[X_0 / y_{\alpha_{N+1}}, \dots, y_{\alpha_H}]$$
$$p_{0\alpha_i} = \mathbb{E}[X_0 Y_{\alpha_i} / y_{\alpha_{N+1}}, \dots, y_{\alpha_H}].$$

Recherche du minimum

Échantillonnage
adaptatif
spatialisé
basé sur
le modèle
booléen

Mathieu
BONNEAU

Introduction

Le modèle
booléen

Le krigeage

Échantillonnage

Illustration

Perspectives

- Ce système se réécrit sous forme matricielle :

$$\Sigma = (p_{\alpha_i \alpha_j} - p_{\alpha_i} p_{\alpha_j})_{1 \leq i, j \leq N}$$

$$\lambda^* = (\lambda_{\alpha_1}^*, \dots, \lambda_{\alpha_N}^*)'$$

$$\sigma_0 = (p_{0 \alpha_i} - p_0 p_{\alpha_i})_{1 \leq i \leq N}$$

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \Sigma \times \lambda^* = \sigma_0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^* = \Sigma^{-1} \times \sigma_0$$

Et $\lambda_{\alpha_{N+1}}^*, \dots, \lambda_{\alpha_H}^*$ quelconque.

Qualité d'un échantillon

- La **variance du krigeage** :

$$\mathbb{E}_{X_0, Y_{\alpha_1}, \dots, Y_{\alpha_N}} \left[\left((\lambda_0^* + \sum_{j=1}^H \lambda_{\alpha_j}^* Y_{\alpha_j}) - X_0 \right)^2 / y_{\alpha_{N+1}}, \dots, y_{\alpha_H} \right]$$

s'écrit maintenant :

$$p_0(1 - p_0) - \sum_{j=1}^N \lambda_{\alpha_j}^* (p_{0\alpha_j} - p_{\alpha_j} p_0)$$

- La **qualité d'un échantillon** $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ sera mesurée par :

$$V^{\text{KRI}}(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \sum_{i=1}^n \left[p_i(1 - p_i) - \sum_{j=1}^N \lambda_{\alpha_j}^* (p_{i\alpha_j} - p_{\alpha_j} p_i) \right]$$

Echantillon optimal, méthode exacte

Échantillonnage
adaptatif
spatialisé
basé sur
le modèle
booléen

Mathieu
BONNEAU

Introduction

Le modèle
booléen

Le krigeage

Échantillonnage

Illustration

Perspectives

- Si l'on se donne un nombre maximale de cellule à visiter A_{\max} , l'échantillon optimal $\{\alpha_1^*, \dots, \alpha_N^*\}$ est solution du problème :

$$\min_{\alpha_1, \dots, \alpha_N, N \leq A_{\max}} \left[V^{\text{KRI}}(\alpha_1, \dots, \alpha_N) + \sum_{i=1}^N \text{coût}(\alpha_i) \right]$$

où $\text{coût}(\alpha_i)$ est le coût lié à l'exploration de la cellule α_i .

- Problème :**
- Sans aucune autre hypothèse, le calcul de ce minimum est trop complexe
 - Les $p_{\alpha_{ij}}$, p_{α_i0} , p_0 n'ont pas une forme explicite.

Echantillon optimal, méthode heuristique

Échantillonnage

adaptatif
spatialisé
basé sur
le modèle
booléen

Mathieu
BONNEAU

Introduction

Le modèle
booléen

Le krigeage

Échantillonnage

Illustration

Perspectives

- Une méthode heuristique possible est d'aller échantillonner les sites où l'incertitude est la plus grande

⇔ Visiter l'ensemble des cellules où
 $\min (\mathbb{P}(X_i = 1/y_{\alpha_{N+1}}, \dots, y_{\alpha_H}), \mathbb{P}(X_i = 0/y_{\alpha_{N+1}}, \dots, y_{\alpha_H}))$
est le plus élevé.

- La qualité d'un échantillon $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, notée \tilde{V}^{KRI} devient :

$$\sum_{i=1}^N \min (\mathbb{P}(X_i = 1/y_{\alpha_{N+1}}, \dots, y_{\alpha_H}), \mathbb{P}(X_i = 0/y_{\alpha_{N+1}}, \dots, y_{\alpha_H}))$$

Echantillon optimal, méthode heuristique

Échantillonnage
adaptatif
spatialisé
basé sur
le modèle
booléen

Mathieu
BONNEAU

Introduction

Le modèle
booléen

Le krigeage

Échantillonnage

Illustration

Perspectives

- L'échantillon optimal $\{\alpha_1^*, \dots, \alpha_N^*\}$ est solution de :

$$\max_{\alpha_1, \dots, \alpha_N, N \leq A_{\max}} [\tilde{V}^{\text{KRI}}(\alpha_1, \dots, \alpha_N) - \sum_{i=1}^N c(\alpha_i)]$$

- Ce qui revient à résoudre le problème exact en faisant deux hypothèses :

(\mathcal{H}_1) Les observations $\{Y_{\alpha_1}, \dots, Y_{\alpha_N}\}$ sont fiables.

(\mathcal{H}_2) $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$\mathbb{E}[X_i X_j / y_{\alpha_{N+1}}, \dots, y_{\alpha_H}] = \mathbb{E}[X_i / y_{\alpha_{N+1}}, \dots, y_{\alpha_H}] \mathbb{E}[X_j / y_{\alpha_{N+1}}, \dots, y_{\alpha_H}]$$

carte réelle

Échantillonnage
adaptatif
spatialisé
basé sur
le modèle
booléen

Mathieu
BONNEAU

Introduction

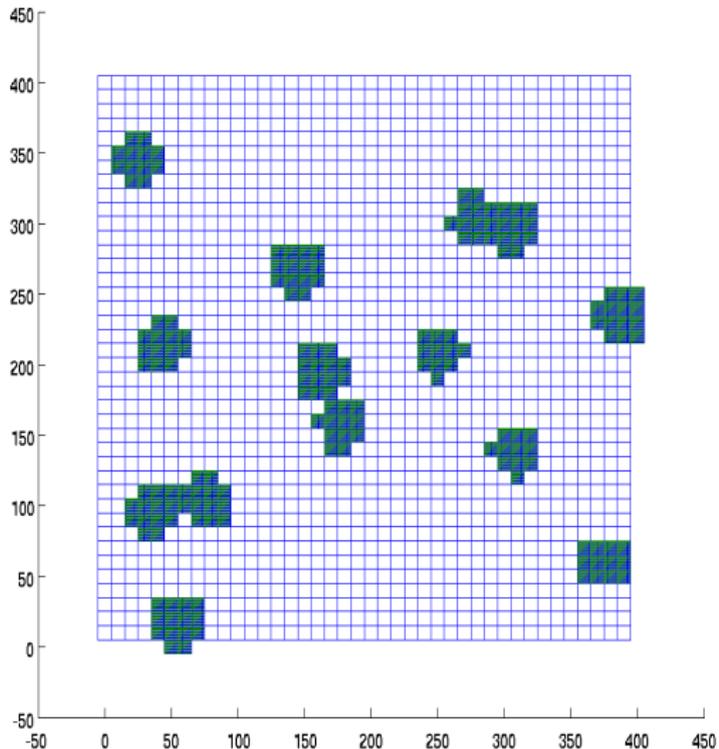
Le modèle
booléen

Le krigeage

Échantillonnage

Illustration

Perspectives



Observations du premier échantillonnage et prochain site à visiter

Échantillonnage

adaptatif
spatialisé
basé sur
le modèle
booléen

Mathieu
BONNEAU

Introduction

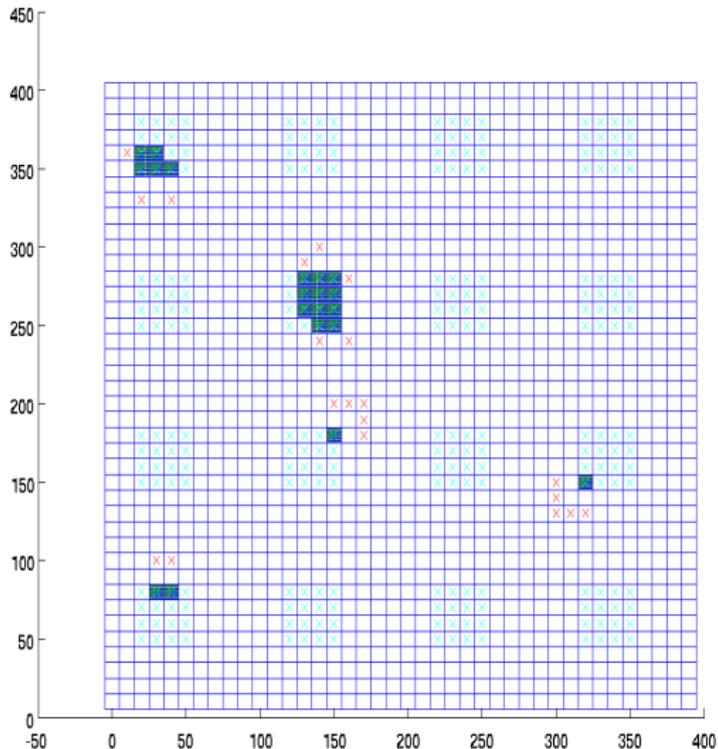
Le modèle
booléen

Le krigeage

Échantillonnage

Illustration

Perspectives



Reconstruction suite au premier échantillonnage

Échantillonnage
adaptatif
spatialisé
basé sur
le modèle
booléen

Mathieu
BONNEAU

Introduction

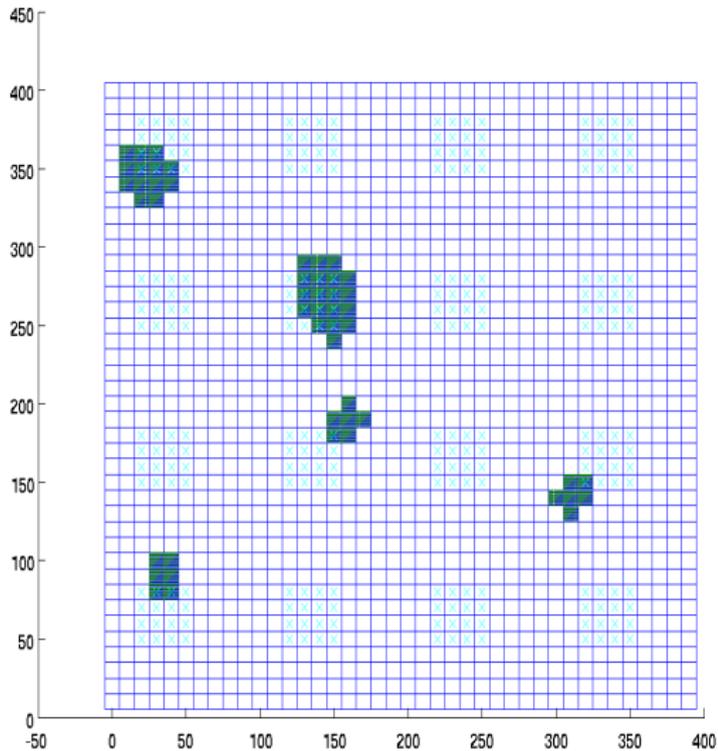
Le modèle
booléen

Le krigeage

Échantillonnage

Illustration

Perspectives



Vraie carte et reconstruction à partir des deux échantillonnages

Échantillonnage
adaptatif
spatialisé
basé sur
le modèle
booléen

Mathieu
BONNEAU

Introduction

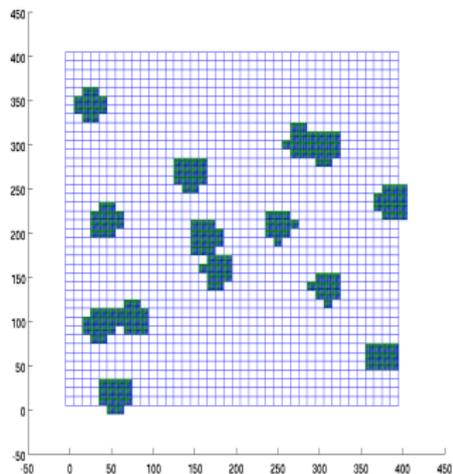
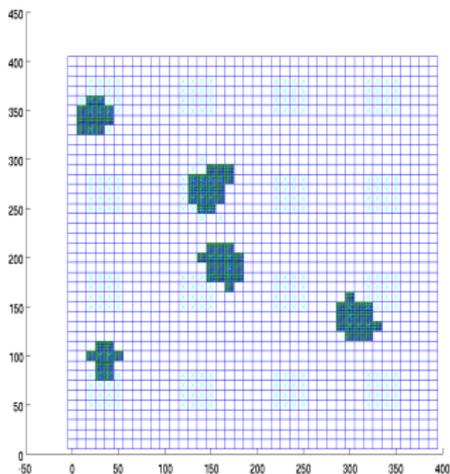
Le modèle
booléen

Le krigeage

Échantillonnage

Illustration

Perspectives



- Mettre au point une méthode d'**échantillonnage adaptative**.
- **Tester** la méthode à partir de “vraies” cartes ou de carte simulées.
- **Comparaison** des résultats obtenue avec les champs de Markov.