

Diagnostic d'espèces invasives par champ de Markov

N. Ravoanjanahary, N. Peyrard, R. Sabbadin

INRA Toulouse - Unité Biométrie et Intelligence Artificielle

Réunion MSTGA

9 Avril 2008

Diagnostic d'espèces invasives

- **But** : reconstruction de carte d'invasion d'un ensemble de sites sujet à une attaque d'espèces invasives.
- **Caractéristiques du problème** :
 - structure et interaction spatiale de l'invasion
 - état de chaque site non connu a priori
 - nombre élevé de cartes possibles
 - actions d'observation coûteuses
 - actions d'observation "séquentielles"
- **Question** : comment planifier les actions d'observation?

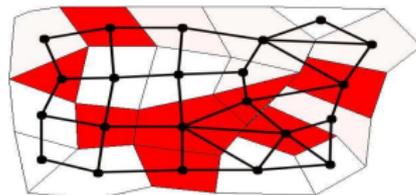
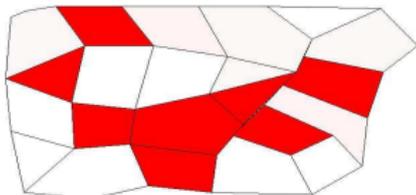
Diagnostic d'espèces invasives

- **Modèles sur graphe (champ de Markov)** pour représenter
 - l'incertitude sur la carte d'invasion
 - les dépendances entre les états de sites voisins
- **Problèmes à résoudre**
 - Reconstruction de la carte d'invasion
 - Planification optimale d'échantillonnage séquentiel
 - Estimation des paramètres du champ de Markov

- 1 Modélisation de carte par champ de Markov
- 2 Problème de reconstruction de carte
- 3 Optimisation d'une politique d'actions d'observation séquentielles
- 4 Résultat préliminaire d'expérimentation
- 5 Conclusion et perspectives

Modèle de champ de Markov

Carte d'invasion = carte de présence ou d'absence



- cellules : sites
- cellules rouges : contaminées
- cellules blanches : non envahies

- Graphe $G = (V, E)$
- $V = \{1, \dots, n\}$
 $E = \{(i, j)\}$ (voisins)
- $\forall i = 1 \dots n,$
 $x_i = 0$ si i non infecté
 $x_i = 1$ si i infecté

Modèle de champ de Markov

Distribution de probabilité sur les cartes

- La vraie carte d'invasion $x = (x_1, \dots, x_n)$ n'est pas connue
- b : distribution de probabilité sur l'ensemble X des cartes.
- $b(x)$: la probabilité que x soit la carte d'invasion

Modèle de champ de Markov par paire

Un champ de Markov par paire (pairwise MRF) x a pour probabilité jointe $b(x)$ qui est un produit de fonctions potentiels ($\Psi = \{\psi_i, \psi_{ij}\}$)

$$b^\Psi(x) = \frac{1}{Z} \left(\prod_{i \in V} \psi_i(x_i) \right) \left(\prod_{(i,j) \in E} \psi_{ij}(x_i, x_j) \right)$$

- ψ_i : quantifie le degré de contamination du site i ,
- ψ_{ij} : décrit la corrélation entre les sites i et j ,
- Z est un facteur de normalisation.

Modèle de Potts et d'Ising

Deux modèles souvent utilisés en physique : Modèles de Potts et d'Ising

Modèle de Potts

$$b^\Psi(x) = \frac{1}{Z} \exp(-\varepsilon(x)) \quad \text{où}$$

$$\varepsilon(x) = - \sum_{i \in V} \varepsilon(x_i) - \frac{\beta}{2} \sum_{(i,j) \in E} \varepsilon(x_i, x_j)$$

- $x_i \in \{1, \dots, K\}, \forall i \in V$
- $\varepsilon(x_i) = \alpha_k$ si $x_i = k, \forall i \in V$
- $\varepsilon(x_i, x_j) = 1$ if $x_i = x_j$ et 0 sinon, $\forall (i, j) \in E$

Modèle d'Ising : $K=2$

- 1 Modélisation de carte par champ de Markov
- 2 **Problème de reconstruction de carte**
- 3 Optimisation d'une politique d'actions d'observation séquentielles
- 4 Résultat préliminaire d'expérimentation
- 5 Conclusion et perspectives

Mesure de similarité entre cartes

Considérons deux cartes :

- x^* : la **vraie** carte d'invasion
- x : la carte d'invasion à **diagnostiquer**

Mesures de similarité entre x et x^*

- 1 $r_{MAP}(x, x^*) = R > 0$ si $x = x^*$ et 0 sinon
- 2 $r_{MPM}(x, x^*) = \sum_{i, x_i = x_i^*} R_i$

Mesure de vraisemblance d'une carte

- $b(x^*)$: probabilité que x^* soit la vraie carte d'invasion
- x : carte d'invasion à diagnostiquer

Similarité espérée de x avec la vraie carte, étant donné b

$$\textcircled{1} \quad r_{MAP}(x, b) = E[r_{MAP}(x, x^*) | b] = b(x) \cdot R$$

$$\textcircled{2} \quad r_{MPM}(x, b) = E[r_{MPM}(x, x^*) | b] = \sum_i R_i \cdot b_i(x_i)$$

où $b_i(x_i)$ est la probabilité marginale de x_i

Reconstruction de carte

Carte Maximum a posteriori (MAP)

$$x^{MAP} = \arg \max_x r_{MAP}(x, b) = \arg \max_x b(x)$$

Carte Maximum a Posteriori Marginale (MPM)

$$x^{MPM} = \arg \max_x r_{MPM}(x, b)$$

$$x_i^{MPM} = \arg \max_{x_i} b_i(x_i), \quad \forall i \in V,$$

Reconstruction de carte

- Calculer x^{MAP} , $r_{MAP}(b)$, x^{MPM} et $r_{MPM}(b)$ est difficile NP-difficile
- Mais il existe des algorithmes approchés : **belief propagation**, par exemple (voir exposés précédents)

- 1 Modélisation de carte par champ de Markov
- 2 Problème de reconstruction de carte
- 3 Optimisation d'une politique d'actions d'observation séquentielles
- 4 Résultat préliminaire d'expérimentation
- 5 Conclusion et perspectives

Actions d'observation

- Notation

b^Ψ : **probabilité associé au champ de Markov x**

(marginales $b_i^\Psi(x_i), x_i \in \{0, 1\}$)

- Action d'observation : site $a \in V$
- Résultat d'observation o : détecté ou non détecté
- Mise à jour de b^Ψ
 - localement
 - mais aussi globalement car il y a interactions entre voisins

Mise à jour d'un champ de Markov par une observation

Soit b_a^o le champ résultant quand

- l'action a est appliquée et
- o est observée

$$b_a^o(x) = \frac{O(x, a, o)b(x)}{p(o|b, a)}, \forall x$$

où $O(x, a, o)$ est la probabilité d'observer o quand on a appliqué a dans x et

$$p(o|b, a) = \sum_x O(x, a, o)b(x), \forall b, a, o$$

Mise à jour d'un champ de Markov par une observation

Appliquées au champ de Markov, les équations générales de mise à jour se simplifient :

- b^Ψ est la probabilité courante associée au champ de Markov
- $O(x, a, o) = p_a(x_a, o), \forall a \in V$: les observations sont locales

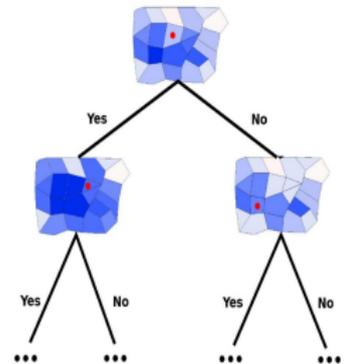
Proposition : Mise à jour de la probabilité associée à un champ

La probabilité $b^{\Psi, a, o}$ mise à jour résultant de l'application de a dans b^Ψ et de l'observation o a la même forme que b^Ψ :

$$\begin{aligned}\psi_a^{a, o}(x_a) &= p_a(x_a, o)\psi_a(x_a), \forall x_a \\ \psi_i^{a, o}(x_i) &= \psi_i(x_i), \forall i \neq a, \forall x_i \\ \psi_{ij}^{a, o}(x_i, x_j) &= \psi_{ij}(x_i, x_j), \forall (i, j) \in E, \forall x_i, x_j\end{aligned}$$

Politique d'actions d'observation

- Politique représentée par un arbre
- Une séquence d'actions/observations alternées est une "trajectoire"
- Champ mis à jour tout au long de la trajectoire τ
- Chaque trajectoire τ a une "probabilité"
- Chaque trajectoire a une valeur : valeur épistémique de champ de Markov final **moins** le coût des actions appliquées.



Politique d'actions d'observation

Valeur de l'arbre politique

$$V_{\delta}^{MAP} = E \left[\sum_{\tau} -c(\tau) + r_{MAP}(b^{\Psi^{final}(\tau)}) \right]$$

$$V_{\delta}^{MPM} = E \left[\sum_{\tau} -c(\tau) + r_{MPM}(b^{\Psi^{final}(\tau)}) \right]$$

Optimisation d'une politique

Trouver la meilleure politique est difficile!

- On a besoin d'un espace exponentiel (en $|V|$) pour représenter une politique complète.
- Même, calculer la meilleure action courante est difficile (PSPACE-difficile).
- Définition récursive d'une politique :

$$Q^*(b, a) = -c(a) + \sum_{o \in O} Pr(o|b, a) \cdot V^*(b_o^a), \quad \forall b, a \neq stop$$

$$Q^*(b, stop) = r(b)$$

$$V^*(b) = \max_x Q^*(b, a)$$

$$a^* = \arg \max_{a \in AU\{stop\}} Q^*(b, a)$$

Méthodes approchées de calcul de politiques optimales

Heuristique à un pas :

- Dans

$$Q^*(b, a) = -c(a) + \sum_{o \in O} Pr(o|b, a) \cdot V^*(b_o^a), \quad \forall b, a \neq stop$$

on remplace $V^*(b_o^a)$ par $r(b_o^a)$.

- On obtient

$$Q^1(b, a) = -c(a) + \sum_{o \in O} Pr(o|b, a)r(b_o^a)$$

$$Q^1(b, stop) = r(b)$$

$$a^* = \arg \max_{a \in AU \setminus \{stop\}} Q^1(b, a)$$

Méthodes approchées de calcul de politiques optimales

Heuristique à plusieurs pas :

- Définition récursive

$$Q^0(b, a) = r(b) \forall b, a$$

$$Q^k(b, a) = -c(a) + \sum_{o \in O} Pr(o|b, a) \max_{a'} Q^{k-1}(b_{a'}^o)$$

- Complexité temporelle de calcul de $Q^k(b, a)$ exponentielle en k

Proposition

$$V^*(b) \geq \max_a Q^k(b, a) \geq \max_a Q^{k-1}(b, a), \forall k \geq 1, \forall b$$

et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_a Q^k(b, a) = v^*(b)$$

- 1 Modélisation de carte par champ de Markov
- 2 Problème de reconstruction de carte
- 3 Optimisation d'une politique d'actions d'observation séquentielles
- 4 Résultat préliminaire d'expérimentation**
- 5 Conclusion et perspectives

Expérimentation avec MPM

- Test avec 3 graphes planaires à n noeuds $n \in \{10, 30, 50\}$
- Génération de graphe par triangulation de Delaunay
- Simulation de 10 bon états infectés pour chaque graphe
- $R_i = \{10, 50, 100\}$
- 10 trajectoires
- Horizon égal à $2n$

Résultat

- **Nombre moyen d'erreurs**

	$n = 10$	$n = 30$	$n = 50$
$R_i = 10$	0.8	1.1	0.9
$R_i = 50$	0.5	0.3	0.1
$R_i = 100$	0.9	0.1	0

- **Longueur de la trajectoire**

	$n = 10$	$n = 30$	$n = 50$
$R_i = 10$	13.1	10.9	7
$R_i = 50$	18.5	41.4	80.2
$R_i = 100$	16.5	55.5	91

⇒ Grande corrélation entre la longueur des trajectoires et la qualité de la carte retournée

- 1 Modélisation de carte par champ de Markov
- 2 Problème de reconstruction de carte
- 3 Optimisation d'une politique d'actions d'observation séquentielles
- 4 Résultat préliminaire d'expérimentation
- 5 Conclusion et perspectives

Conclusion

Approche méthodologique proposée

- Représentation et reconstruction de carte d'invasion par champ de Markov
- Recherche heuristique pour optimiser le diagnostic d'actions (via l'optimisation de la politique d'actions d'observation)

⇒ **Déjà implémentées en Matlab**

Perspectives

- Estimation des paramètres (⇒ estimation de b initial)
- Optimisation et estimation alternées
- Applications réelles (diagnostic d'espèces invasives, par ex: fourmis)
- Optimisation par simulation